Maths: Khôlle

2024/09/23

M. Chiecchio

Louis Dalibard

Problème 1

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein.
Considérons E et F deux ensembles infinis.
Le théorème de Cantor-Bernstein est le suivant:

$$(\exists \Phi : E \longrightarrow F, \exists \Psi : F \longrightarrow E, \quad \Phi \text{ injective et } \Psi \text{ injective}) \implies E \simeq F$$

1. Montrer que toute fonction croissante pour $\subseteq$ admet un point fixe. [1]

2. Supposons:
$$\exists \Phi : E \to F, \exists \Psi : F \to E, \quad \Phi \text{ injective et } \Psi \text{ injective}$$
On considere la fonction
$$\begin{aligned} \gamma \colon \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A &\longmapsto E \setminus \Psi(F \setminus \Phi(A)), \end{aligned}$$

3. Montrer que γ est croissante pour $\subseteq$

4. En déduire une bijection de E dans F. Conclure.

[1] **Aide:** Considérer l'ensemble $H = \{x \in P(E) \mid x \subseteq f(x)\}$